CONCOURS DE JUIN 1974

Deuxième Epreuve de Mathématiques

(Durée : 3 h)

1°) On considère une forme quadratique

$$\phi(h) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, h_i\, h_j$$

où $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$

$h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

et l'on pose $||h|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}$

La matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ est réelle symétrique.

Ses valeurs propres distinctes ou confondues sont notées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Trouver une relation simple liant $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

2°) Soit $B_r(0) = \{ h \in \mathbb{R}^n \mid ||h|| < r \}$ (r constante positive).

On considère une application continue $\varepsilon : B_r(0) \longmapsto \mathbb{R}$

$h \longmapsto \varepsilon(h)$

qui vérifie $\varepsilon(0, 0, \ldots, 0) = 0$.

et soit $\psi : B_r(0) \longmapsto \mathbb{R}$

$h \longmapsto \psi(h) = \phi(h) + ||h||^2\, \varepsilon(h)$

Etablir la proposition suivante

" ψ admet un maximum relatif en $0 = (0, 0, \ldots 0)$

$\Longrightarrow \lambda_i \leq 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ "

En déduire que :

" ψ admet un maximum relatif en $0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \leq 0$ "

- II -

Soit Ω un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$

Son damiètre est noté d :

$$d = \sup_{(x,y) \in \Omega^2} \left\{ ||x-y|| \right\}$$

On considère une application $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$

$$x=(x_1,\ldots x_n) \longmapsto f(x_1,\ldots,x_n)$$

dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 sont définies et continues dans Ω. On suppose que f admet un maximum en un point x° de Ω.

1°) Ecrire la formule de Taylor-Lagrange.

En déduire que :

$$f(x) - f(x_o) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i\, h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j} (x^\circ) + ||h||^2\, \varepsilon(h)$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x^\circ = (x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ)$, $h_i = x_i - x_i^\circ$

ε est une fonction qui satisfait à la propriété suivante :

$$\varepsilon(h) \longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque } ||h|| \longrightarrow 0_+$$

2°) Montrer que l'on a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (x^\circ) \leqslant 0$$

- III -

$\overline{\Omega}$ désigne l'adhérence de Ω dans $\mathbb{R}^n$.

Soit une application $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est continue sur $\overline{\Omega}$, dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 inclus sont définies et continues sur Ω et vérifient :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \qquad \text{sur } \Omega$$

On note $M = \sup_{x \in \partial\Omega} \{ u(x) \}$, $N = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \{u(x)\} = u(x^\circ)$

et soit v l'application $\overline{\Omega} \longmapsto \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$x \longmapsto v(x) = u(x) + \frac{N-M}{2d^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^\circ)^2$$

$$\forall\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\Omega}$$

a) On suppose que $N \geq M$ (hypothèse H)

Montrer que $x^\circ \in \Omega$

Comparer $v(x^\circ)$ et $\sup_{x \in \partial\Omega} \{v(x)\}$. En déduire que v atteint son maximum en un point $\hat{x} \in \Omega$.

b) Calculer Δv et en déduire que l'hypothèse H est fausse.

- IV -

Soit une application $g : \partial\Omega \longmapsto \mathbb{R}$ qui est supposée continue.

On étudie le problème suivant :

" trouver une application continue $u : \overline{\Omega} \longmapsto \mathbb{R}$ qui satisfait aux conditions suivantes :

- elle admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 qui sont définies et continues sur Ω.
- $\Delta u = 0$ sur Ω.
- $u\big|_{\partial\Omega} = g$ (autrement dit, $u(x) = g(x)\ \forall x \in \partial\Omega$) "

a) Etablir l'unicité de la solution

b) Soit $\delta(g)$ une variation de g

$$\delta(g) = \sup_{x \in \partial\Omega} \{|g_1(x) - g(x)|\}$$

et soit $\delta(u)$ la variation de u correspondante

$$\delta(u) = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \{u_1(x) - u(x)\}$$

Montrer que $\delta(u) \leq \delta(g)$.

En déduire la stabilité de la solution par rapport à la donnée sur la frontière.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail